第 24 講　積分で表された関数

24

［A］ 次の各問いに答えよ．

(1) $f(x)=x+\int_0^1 e^t f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) $\int_a^x f(t)dt=\sin x$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ．ただし，$3<a<4$ とする．

［B］ $f(x)=\int_x^{2x}\log t\,dt\ (x>0)$ とするとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ を最小にする x の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 24 講　積分で表された関数

24　a を 0 でない実数の定数とする．

$$\int_a^x f(t)dt = x^2 + x\int_0^1 e^t f(t)dt$$

を満たす関数 $f(x)$ と a の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第24講　積分で表された関数

24

［A］ 次の各問いに答えよ．

(1) $f(x)=x+\int_0^1 e^t f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) $\int_a^x f(t)dt=\sin x$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ．ただし，$3<a<4$ とする．

［B］ $f(x)=\int_x^{2x}\log t\,dt\ (x>0)$ とするとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ を最小にする x の値を求めよ．

【答】 ［A］(1) $f(x)=x-\dfrac{1}{e-2}$　(2) $f(x)=\cos x$，$a=\pi$

［B］(1) $\log 4x$　(2) $\dfrac{1}{4}$

【解説】 ［A］(1) 定数 k を用いて $\int_0^1 e^t f(t)dt=k$ とおくことができるので，$f(x)=x+k$ と表せる．

このとき

$$k=\int_0^1 e^t f(t)dt=\int_0^1 e^t(t+k)dt=\Big[(t+k-1)e^t\Big]_0^1$$
$$=(e-1)k+1$$

より $k=-\dfrac{1}{e-2}$ を得る．よって $\boldsymbol{f(x)=x-\dfrac{1}{e-2}}$

(2) $\int_a^x f(t)dt=\sin x$ の両辺を x で微分して $f(x)=\cos x$ を得る．

また $\int_a^x f(t)dt=\sin x$ の両辺に $x=a$ を代入して $0=\sin a$．これと $3<a<4$ より $a=\pi$

以上より，$\boldsymbol{f(x)=\cos x}$，$\boldsymbol{a=\pi}$

［B］(1) $f'(x)=\left(\int_x^{2x}\log t\,dt\right)'=\left\{\log(2x)\right\}\cdot(2x)'-(\log x)\cdot(x)'=2\log 2x-\log x$

$=\boldsymbol{\log 4x}$

(2) $f'(x)=\log 4x$ より $f(x)$ の増減は

x	0	…	$\frac{1}{4}$	…	∞
$f'(x)$		−	0	＋	
$f(x)$		↘		↗	

となるので，$f(x)$ を最小にする x の値は $x=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 24 講　積分で表された関数

24　a を 0 でない実数の定数とする．

$$\int_a^x f(t)dt = x^2 + x\int_0^1 e^t f(t)dt$$

を満たす関数 $f(x)$ と a の値を求めよ．

【答】　$f(x) = 2x - \dfrac{2}{e-2}$，$a = \dfrac{2}{e-2}$

【解説】　定数 k を用いて $\int_0^1 e^t f(t)dt = k$ とおくことができるので，与式は

$$\int_a^x f(t)dt = x^2 + kx$$

となる．

両辺を x で微分して $f(x) = 2x + k$ を得る．

また，両辺に $x = a$ を代入することで $0 = a^2 + ka \iff 0 = a(a+k)$ となるが，$a \neq 0$ より $a = -k$ である．

このとき

$$\begin{aligned} k &= \int_0^1 e^t f(t)dt = \int_0^1 e^t(2t+k)dt = \Big[(2t+k-2)e^t\Big]_0^1 \\ &= (e-1)k + 2 \end{aligned}$$

より $k = -\dfrac{2}{e-2}$ を得るので，$\boldsymbol{f(x) = 2x - \dfrac{2}{e-2}}$，$\boldsymbol{a = \dfrac{2}{e-2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。